LA PUISSANCE D'UN NOMBRE NATUREL

I- Généralité :

Soit a un nombre non nul et n un entier naturel non nul. L'aire d'un carré de côté a est a^2 (on lit « a au carré », ou « *a* puissance 2 », ou « *a* exposant 2 »).

De même, le volume d'un cube d'arête a est a^3 (on lit « *a* au cube » ou « *a* puissance 3 » ou « *a* exposant 3 »).

Mais quel sens ont donc d'autres écritures telles que 7^5, $(-2)^7$ou 5^{-3} ?

1- Définition :

Si $n \geq 2$, alors a^n est le produit de n facteurs tous égaux à a : $a^n = \underbrace{a \text{ x} \ldots \text{ x } a}_{a \text{ est écrit } n \text{ fois}}$.

Si $n = 1$, alors $a^1 = a$.

De plus, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Enfin, par convention, si a ‡ 0 on pose $a^0 = 1$. Donc « 0^0 » n'est pas défini.

Vocabulaire :

— a^n et a^{-n} s'appellent des **puissances** de a.
— n (ou $-n$) s'appelle l'**exposant**.
— Pour a^n, on lit « a à la puissance n » ou « *a* exposant *n* ».

— 10^7 se lit « 10 à la puissance 7 », mais $\left(\dfrac{3}{7}\right)^5$ se lit « 3 sur 7, le tout à la puissance 5 ».

Exemples :

$3^5 = \underbrace{3 \text{ x } 3 \text{ x } 3 \text{ x } 3 \text{ x } 3}_{3 \text{ est écrit } 5 \text{ fois}} = 243.$

$(-2)^7 = \underbrace{(2-) \text{ x } (-2) \text{ x } (-2) \text{ x } (-2) \text{ x } (-2) \text{ x } (-2) \text{ x } (-2)}_{-2 \text{ est écrit } 7 \text{ fois}} = 128.$

$5^{-3} = \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{5 \text{ x } 5 \text{ x } 5} = \dfrac{1}{75} = 0{,}008.$

Remarques:

En **informatique**, le nombre 2^{10} (qui est égal à 1 024) est fréquemment utilisé. On prend souvent 1 000 comme valeur approchée, comme par exemple lorsqu'on parle de Kilo-octets (avec un K majuscule pour marquer la différence avec le kilo- qui est un préfixe indiquant une multiplication par 1 000) ;

pour calculer, avec une calculatrice, une puissance d'un nombre, on utilise la touche $\mathbf{y^x}$ (ou $\mathbf{x^y}$ ou **∧** ou**↑**). Ainsi, pour calculer $2{,}3^4$, on tape la séquence : 2, 3 y^x 4 **=**, ce qui donne : 27,984 1.

2- Propriétés :

a et b étant des nombres relatifs non nuls, n et p étant des entiers relatifs, on a :

$a^n \times a^p = a^{n+p}$; $\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$;

$a^n \times b^n = (ab)^n$; $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$;

$(a^n)^p = a^{n\,p}$.

Examples:

$3^4 \times 3^7 = 3^{4+7} = 3^{11} = 177\,147$

$\dfrac{-5^3}{-5^5} = (-5)^{3-5} = (-5)^{-2} = \dfrac{1}{(-5)^2} = \dfrac{1}{25} = 0{,}04$.

$2^6 \times 5^6 = (2 \times 5)^6 = 10^6 = 1\,000\,000$

$(4^2)^{-3} = 4^2 \text{ x } (-3) = 4^{-6} = \dfrac{1}{4^6} = \dfrac{1}{4\,096} = 0{,}000\,244$.

3- Applications :

Écrire un nombre sous forme d'une puissance

Considérons le nombre A égal à $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$.
Il y a 6 facteurs tous égaux à 3, donc $A = 3^6$.

De même, si $B = \dfrac{1}{7} \text{ x } \dfrac{1}{7} \text{ x } \dfrac{1}{7} \text{ x } \dfrac{1}{7} \text{ x } \dfrac{1}{7}$, alors $B = \left(\dfrac{1}{7}\right)^5 = \dfrac{1}{7^5} = 7^{-5}$.

Enfin, si $C = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times 0{,}7 \times 0{,}7 \times 0{,}7 \times 0{,}7$, alors :
$C = (-3)^4 \times 0{,}7^4$

$C = ((-3) \times 0{,}7)^4$
$C = (-2{,}1)^4$

Remarque : dans l'écriture de C, il y a quatre facteurs négatifs et par conséquent, le résultat est positif. On a donc également : $C = 2{,}1^4$.

Cette remarque se généralise. Soit a un nombre strictement négatif et n un entier relatif :
— si n est pair alors a^n est positif ;
— si n est impair alors a^n est négatif.

Utiliser des puissances de 10

Voici une conséquence de la définition de la puissance d'un nombre non nul.
Soit n un entier strictement positif.

10^n s'écrit : 1 suivi de n chiffres 0.

10^{-n} s'écrit : 0,.....1 avec n chiffres 0 au total (dont $n - 1$ zéros après la virgule).

***Exemples* :**

$10^3 = 1\,000$ (trois zéros) ; $10^6 = 1\,000\,000$ (six zéros).

$10^{-2} = 0{,}01$ (deux zéros) ; $10^{-6} = 0{,}000\,001$ (six zéros).

Bien sûr, $10^0 = 1$.

Ceci permet d'écrire les nombres décimaux en écriture scientifique.

Exemples :

$1\,500\,000 = 1{,}5 \times 1\,000\,000 = 1{,}5 \times 10^6$
$0{,}000\,000\,054\,7 = 5{,}47 \times 0{,}000\,000\,01 = 5{,}47 \times 10^{-8}$

II- Calcul :

On retrouve des puissances dans de très nombreuses formules de mathématiques ou de physique.

Par exemple, le volume d'une boule est donné par la formule $\frac{4}{3}\pi R^3$, où R désigne le rayon.

Comment utiliser la définition et les propriétés des puissances pour les calculer ?

1- Utiliser la définition des puissances :

On veut calculer les nombres A, B, C, D, E, F, G, H et I suivants :
$A = 1{,}1^3 = 1{,}1 \times 1{,}1 \times 1{,}1 = 1{,}331$.

$B = (-0,2)^5 = (-0,2) \times (-0,2) \times (-0,2) \times (-0,2) \times (-0,2) = -0,000\ 32$, car le nombre $-0,2$ est négatif et l'exposant, 5, est impair.

$C = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$. On peut aussi écrire : $C = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$.

$D = 1\ 789^0 = 1$, car tout nombre non nul élevé à la puissance 0 donne 1 (mais $0^{1\ 789} = 0$).

$E = (-2\ 001)^1 = -2001$.

$F = (-1)^{2\ 001} = -1$, car il y a un nombre impair de facteurs tous égaux à -1.

$G = (-1)^{3\ 000} = 1$, car il y a un nombre pair de facteurs tous égaux à -1.

$H = -2^8 = -128$. En effet, l'écriture -2^8 est équivalente à l'écriture $-(2^8)$.

.

2- Appliquer les propriétés des puissances :

Dans ce paragraphe, a et b désignent des nombres non nuls, n et p des entiers relatifs.

On veut écrire sous la forme d'une puissance les nombres A, B, C, D et E suivants :
$A = (-7)^3 \times 5^3 = (-7 \times 5)^3 = (-35)^3$

On a utilisé la propriété : $a^n \times b^n = (ab)^n$.

$B = (-0,7)^7 \times (-0,7)^4 = (-0,7)^{7+4} = (-0,7)^{11}$

On a utilisé la propriété : $a^n \times a^p = a^{n+p}$.

$C = 4^3 \times 4^{-9} = 4^{3-9} = 4^{-6}$

On a ici aussi utilisé la propriété : $a^n \times a^p = a^{n+p}$. En effet, $3 + (-9) = 3 - 9 = -6$.

$D = (2,3^5)^3 = 2,3^{5 \times 3} = 2,3^{15}$

On a utilisé la propriété : $(a^n)^p = a^{np}$.

$D = (2,3^5)^3 = 2,3^5 \text{ x } 3 = 2,3^{15}$.

On a utilisé la propriété : $(a^n)^p = a^{np}$.

$E = \frac{4^2}{4^7} = 4^{2-7} = 4^{-5}$.

On a utilisé la propriété : $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$.

Remarque : attention, il n'existe pas de formules concernant la somme des puissances !
Ainsi : $G = 3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$ (alors que $3 + 5 = 8$ et $8^2 = 64$), car les puissances ont priorité sur les additions.

Les calculs de puissances ou de racines carrées peuvent être fastidieux si on ne dispose pas d'une calculatrice.

Comment les faire avec une calculatrice ?

3- Utilisation de la machine :

La plupart des calculatrices possèdent une touche « carré » : $\mathbf{x^2}$.

Exemple : pour calculer l'aire d'un carré de côté 3,7 m, il suffit de saisir la séquence : 3, 7 x^2.

L'affichage indique : 13,69. L'aire de ce carré est donc 13,69 m².

Remarque : sur certaines calculatrices, il faut appuyer sur la touche **EXE** pour que le calcul soit exécuté.

- Calculer une puissance :

Pour calculer un cube (si la calculatrice ne possède pas la touche « cube » : $\mathbf{x^3}$) ou une puissance quelconque, on peut utiliser la touche « puissance » dont le symbole sur le clavier de la calculatrice

est : $\mathbf{Y^x}$ ou $\mathbf{X^Y}$ ou **^** ou ↑.

Exemple 1 : on veut calculer le nombre $A = 57^3$.

On tape la séquence : 5 7 y^x 3 = (ou : 5 7 y^x 3 EXE).

L'affichage indique : 185193

Remarque : suivant les modèles, c'est la touche **=** ou la touche **EXE** qui donne l'ordre d'effectuer les calculs.

Exemple 2 : on veut calculer le nombre $B = (-2,4)^4$.

On tape la séquence : 2 , 4 **+/-** Y^x 4 **=**

L'affichage indique : **33,1776**

On pouvait prévoir que le résultat serait positif, puisque l'exposant est pair, et ne pas utiliser la touche **+/-**.

Exemple 3 : on veut calculer le nombre $C = 0{,}4^{-7}$.

On tape la séquence : 0, 4 Y^x 7 **+/- =**

L'affichage indique : **97,65625**

Exemple 4 : on veut calculer le nombre $\boldsymbol{D = 17^{23}}$.On tape la séquence : 1 7 $\mathbf{y^x}$ 2 3 **=**

L'affichage indique : 1,99675689 ^{28}

Cet affichage signifie : $1{,}996\,756\,89 \times 10^{28}$.

Remarque : lorsque le nombre est trop grand par rapport à l'écran d'affichage, la calculatrice passe automatiquement en mode scientifique. On constate que certaines décimales sont alors perdues (sauf sur des calculatrices très performantes travaillant en mode exact).

- **Calculer une racine carrée :**

La plupart des calculatrices possèdent une touche « racine carrée » : **√**.

Exemple 1 : on veut calculer le nombre $A = \sqrt{106929}$.

Suivant les calculatrices, on tape :

soit la séquence : 1 0 6 9 2 9 **√ =**

soit la séquence : **√** 1 0 6 9 2 9 (ou : **√** 1 0 6 9 2 9 **EXE**)

L'affichage indique : 327

Exemple 2 : on veut calculer le nombre $B = \sqrt{47}$.

On tape la séquence : 4 7 **√ =** (ou : **√** 47 **=** ou bien : **√** 47 **EXE**)

L'affichage indique : 6,8556546

Remarque : il faut noter que le résultat affiché par la calculatrice n'est qu'une valeur approchée.

Exemple 3 : on veut calculer le nombre $C = \sqrt{189^2 + 340^2}$.

On tape la séquence : (1 8 9 $\mathbf{x^2}$ + 3 4 0 $\mathbf{x^2}$) **√ =** ou : **√**(1 8 9 $\mathbf{x^2}$ + 3 4 0 $\mathbf{x^2}$) **=**

L'affichage indique : 389

Remarque : alors que sur une feuille de papier on n'écrit pas les parenthèses (la barre horizontale du symbole **√** en tient lieu), celles-ci sont obligatoires sur la calculatrice.